数理解析研究所講究録
501巻 1983年 49-73

置換類群の torsion part

阪市大 宮田武彦 (Takehiko Miyata)

§0 序論

πは有限群とする．有限π-集合S（作用は左から）のアーベル化$\mathbb{Z}S$（$\mathbb{Z}[S]$と表記することもある）に同型な$\mathbb{Z}\pi$-加群を<u>置換$\mathbb{Z}\pi$-加群</u>と呼ぶ．MとNは置換加群の直和因子とするとき，

MとNは<u>同値</u> $\Longleftrightarrow$ $M\oplus\mathbb{Z}S\cong N\oplus\mathbb{Z}S$ となるπ-集合S,Tが存在．

と定義する．

$T^{g}(\pi)=\{$置換加群の直和因子の同型類$\}/($上の同値関係$)$

とおき，直和で和を導入すると，$T^{g}(\pi)$は有限生成アーベル群になる。これをDressに従ってπの置換類群と呼ぼう（[DR.2]），有限生成になることは[S-E]定理6.17 (p.118)を参照．$T^{g}(\pi)$の階数，すなわち$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}T^{g}(\pi))$はDressにより計算されている（[DR.2] 定理3.1, p10).

この小論では$T^{g}(\pi)$の torsion part $t(\pi)$を考察する．

まず，$t(\pi)$は明らかな部分群を持つことを説明しよう．πの

類群（locally free class group）$Cl(\mathbb{Z}\pi)$ から $T^g(\pi)$ へ自然な準同型があり，その核 $C^g(\mathbb{Z}\pi)$ は

$$C^g(\mathbb{Z}\pi)=\{[\mathfrak{a}]-[\mathbb{Z}\pi]\in Cl(\mathbb{Z}\pi) \mid \mathfrak{a}\oplus\mathbb{Z}\pi\cong\mathbb{Z}\pi\oplus\mathbb{Z}T \text{ となる } \pi\text{-集合 } S,T \text{ が存在}\}$$

となっている．$\mathbb{Q}\pi$ の $\mathbb{Z}\pi$ を含む極大整域の一つを $\mathfrak{M}$ とするとき，

$$D(\mathbb{Z}\pi)=\ker(Cl(\mathbb{Z}\pi)\longrightarrow Cl(\mathfrak{M}))$$

を π の <u>the kernel group</u> と呼ぶ．$D(\mathbb{Z}\pi)$ は極大整域 $\mathfrak{M}$ の取り方によらないことが知られている．Oliver は

$$D(\mathbb{Z}\pi)=\{[\mathfrak{a}]-[\mathbb{Z}\pi] \mid \mathfrak{a}\oplus\mathbb{Z}S\cong\mathbb{Z}\pi\oplus\mathbb{Z}S \text{ となる } \pi\text{-集合 } S \text{ が存在}\}$$

従って $C^g(\mathbb{Z}\pi)\supset D(\mathbb{Z}\pi)$ を示し，種々の π に対して巧妙な方法で $C^g(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ を計算している（[OL1, 2]）．

さて，$Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)\hookrightarrow t(\pi)$ だから，左の群は $t(\pi)$ の部分群とみなし，この二つの群を比較することを考える．

大域的な結果を出すには，局所的な結果から出発するのが常套手段だから，$T^g(\pi)$ に対応する局所的な対称を作ろう．R は可換環，S は（有限）π 集合とする．RS と同型な $R\pi$ 加群を <u>R 上の置換加群</u>と呼び，R 上の置換加群の直和因子に対して $T^g(\pi)$ の類似物を作り，これを $T^g(\pi,R)$ と書き，*torsion part* を $t(\pi,R)$ と書くことにする．R がさらに整域のとき，$R\pi$-*lattices*（有限

生成Rπ-加群でR-加群としてはtorsionを持たないもの)の同型類に直和で和を入れると半群ができる．この半群のグロタンディエック群をπのR上の表現環と言い$K(\pi, R)$と書く．πのバーンサイド環$A(\pi)$から$K(\pi, R)$へ自然な写像があるが，その像を$A(\pi, R)$と書くことにする．

pを素数とするとき，pでの$\mathbb{Z}$の局所化を$\mathbb{Z}_p$，完備化を$\hat{\mathbb{Z}}_p$と書くことにする．

Dressは[DR2]の§2で，この研究の出発点になった二，三の結果を本質的に証明している．自然な準同型

$$\varphi\ ;\ T^g(\pi) \longrightarrow \prod_{p \mid |\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

を考える．φを$t(\pi)$に制限すると，$\varphi|_{t(\pi)}$の像は$\prod_{p \mid |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p)$に含まれる．まず，$\varphi$の像は決定できることが[DR2] 定理2.1の証明(p.3)で示される．各素数pに対し自然な準同型

$$\psi_p\ ;\ T^g(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Q})/A(\pi, \mathbb{Q})$$

を考えると，

命題0.1．$(M_p) \in \prod_{p \mid |\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$とする．

$$(M_p) \in \mathrm{Im}\,\varphi \iff {}^\forall p, q \mid |\pi| \text{ に対して } \psi_p(M_p) = \psi_q(M_q).$$

$K(\pi, \mathbb{Q})/A(\pi, \mathbb{Q})$は有限群(Artinの帰納定理)，また各$p \mid |\pi|$に対して$T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$は有限生成であるから，命題1によると$\mathrm{Coker}\,\varphi$は有限アーベル群である．この命題は例を作るのに便利である．

[DR2]の§2の重要な結果は補題2.4と言うよりは、その証明方法である。この方法は次の二つの命題に分けられる。

命題0.2. $\ker(\varphi|_{t(\pi)}) = \ker\varphi$. すなわち,

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} T^g(\pi,\mathbb{Z}) \cong \prod_{p\,|\,|\pi|} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} T^g(\pi,\mathbb{Z}_p) \quad \text{([DR2] 定理 2.1)}$$

命題0.3. $|\pi|\cdot\ker\varphi \subset Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$.

この命題は、[DR2]の§2で奇妙にも見落されている補題を補うと、$|\pi|\cdot t(\pi)\subset Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$ なる定理に拡張できる。πが巡回群、またはp-群のときは $t(\pi)=Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$ であることが簡単に示せる。さらに、これらの場合は $T^g(\pi)=t(\pi)$ であることも証明できる。

以下各節の内容を述べよう。

§1では安定同値、局所同型なる概念を説明し、この論文全般で必要な技術を用意する。合わせて、"見落された補題"(補題1.6)を述べ、命題0.3の拡張を証明する。

§2では補題1.6が証明される。この節はまったく技術的である。

§3では、πが巾零群であり <u>of split type</u> なら(例えばπがアーベル群のときはこの条件を満している)、$t(\pi)=Cl(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ であることが示される。

§4. πが特別な metacyclic 群の場合は $t(\pi)=Cl(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ になっていることを示す。

§5では, $t(\pi) \neq Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^{\ell}(\mathbb{Z}\pi)$ である例を2種示す。

§1、局所同型と安定同型.

$\mathbb{Z}\pi$-lattices M, N が<u>局所同型</u>であるとは次の同値な条件が成り立つことである。

(i) すべての素数 p に対して $\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} N$

(ii) $\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$

(iii) $\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$

(iv) $M\oplus \mathfrak{a} \cong N \oplus \mathbb{Z}\pi$ を満す射影イデアル $\mathfrak{a}$ が存在.

(v) M, N は $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} K(\pi, \mathbb{Z})$ では同じ元をあらわす.

(vi) $M^m \cong N^m$ となる整数 m が存在する.

この定義に関して二,三の注意が必要である.

(1) $\mathbb{Z}_p\pi$-lattices M, N に対して

$$M\cong N \iff \hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p} N$$

(2) $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-加群(有限生成)に関しては Krull-Schmidt の定理が成り立つ。このことから, (i)⟺(v) が言える.

(3) 射影 $\mathbb{Z}\pi$-加群 P は局所自由である。すなわち,任意の素数 p に対して $\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} P \cong (\mathbb{Z}_p\pi)^n$ となる整数 $n>0$ が存在する(Swan).

(4) (i)⟺(iv)⟺(vi) は本質的には Roiter による([R], [S-E]).

MとNが局所同型のとき $M \sim N$ と書くことにする。

$\mathbb{Z}\pi$-lattices M, N に対して $M \oplus L \cong N \oplus L$ となる $\mathbb{Z}\pi$-加群 L が存在するとき，これらは<u>安定同型</u>であるという．MとNとが安定同型であれば Krull-Schmidt の定理によりMとNとは局所同型である．しかし，逆は必ずしも成り立たない．安定同型に関しては次の Oliver の結果（[OL 1]）の結果は基本的である．

$$M \text{とNとは安定同型} \Longleftrightarrow M \oplus \mathbb{Z}S \cong N \oplus \mathbb{Z}S, \quad S; \pi \text{集合}.$$

この結果によれば，自然な準同型 $T^g(\pi) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ は単射であることが分る． $K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ の torsion part は $t(\pi)$ であることは簡単に判る。

$$\mathrm{Res}_H^\pi \ ; \ A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

はHへの制限写像とする．

有限群 π は p-シロー部分群 π_p が正規部分群であり，π/π_p が巡回群のとき<u>法pで巡回群</u>と呼ばれる．一般の有限群 π に対し，

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(\pi) = \{ H \leq \pi \mid H \text{は法} p \text{で巡回群} \}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\pi) = \bigcup_{p \mid |\pi|} \mathcal{A}_p$$

とおく．今後は $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_p$ はこの意味でのみ使用することにする．

$\mathbb{Z}\pi$-加群 M に対し $M|_H$ は M の G の作用の H への制限とする．π-集合 S に対し $\mathbb{Z}[S]|_H = \mathbb{Z}[S|_H]$ は置換 $\mathbb{Z}H$-加群である．

命題1.1([DR3],§9) πは法pで巡回群, S, Tはπ集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \Longleftrightarrow S \cong T.$$

特に $\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \Longleftrightarrow \mathbb{Z}S$と$\mathbb{Z}T$は局所同型 を意味する.

この命題とMackey functorのvertexの理論とを使うと,

命題1.2([DR3],§9) πは任意の有限群, S,Tはπ集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \Longleftrightarrow \text{任意の } H \in \mathcal{A}_p \text{ に関して } S|_H \cong T|_H.$$

が得られる.

$$\Phi_p = \Phi_p(\pi) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}_p} \ker(\mathrm{Res}^{\pi}_{H})$$

$$\Phi = \Phi(\pi) = \bigcap_{p \mid |\pi|} \ker(\mathrm{Res}^{\pi}_{H})$$

と置く. これらはバーンサイド環$A(\pi)$のイデアルである. 命題1.2は言い替えると

定理1.3([DR3]§9) S,Tはπ集合とする.

$$\mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は局所同型} \Longleftrightarrow [S]-[T] \in \Phi(\pi)$$

$\mathbb{Z}S$と$\mathbb{Z}T$はいつ同型になるかという問題については[OL1],[OL2]を参照. また,任意のπ-集合S,Tについて,

$$\mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は局所同型} \Longleftrightarrow \mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は安定同型}$$

(この条件は$A(\pi, \mathbb{Z}) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$が単射であることと同値である)が成り立つ必要十分条件は$C\ell(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$であることは完全列 $0 \longrightarrow C\ell(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow A(\pi, \mathbb{Z}) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$ から分る. この注意と命題1.1とからπが法pで巡回群のとき

は $C^g(\mathbb{Z}\pi)=D(\mathbb{Z}\pi)$は成り立っている．

補題 1.4（[DR2]，補題 2.7）πは有限群，$\mathcal{B}$はπの部分群の族で条件

「H, Kはπの部分群で$gHg^{-1}\subset K$となる$g\in\pi$が存在するとする．$K\in\mathcal{B}\Longrightarrow H\in\mathcal{B}$」

を満す．$\chi:\mathcal{B}\longrightarrow\mathbb{Z}$は任意の$g\in\pi$，$K\in\mathcal{B}$に対し$\chi(gKg^{-1})=\chi(K)$が成り立つ写像とする．このとき

(i) $|\pi|\cdot\chi(K)+|S^K|=|T^K|$, $\forall K\in\mathcal{B}$

(ii) $(S\cup T)^H=\phi$, $\forall H\notin\mathcal{B}$

を満たすπ集合S，Tが存在する。

ここで$|S^H|$はHで固定されるSの元の個数．

証明は[T, D]命題1.2.3，p3（Dressの結果）を利用すると直ちに得られる．

この補題は簡単なものであるが，Artinの帰納定理等を含む重要な結果である．

$\mathcal{B}=\mathcal{A}_p$，$\chi(H)=1$，$H\in\mathcal{A}_p$の場合に補題1.4を適用する．命題1.2を考慮に入れると

(1) $$\mathbb{Z}_p^{|\pi|}\oplus\bigoplus_{H\in\mathcal{A}_p}{}'\,\mathbb{Z}_p[\pi/H]^{m(H)}\cong\bigoplus_{H\in\mathcal{A}_p}{}'\,\mathbb{Z}_p[\pi/H]^{n(H)},\quad m(H),n(H)\geq 0$$

（$\oplus'$は共役類にわたって直和を取ることをあらわす）

なる同型が存在することが分る。

Rは可換環，Mは有限生成$\mathbb{Z}\pi$-加群とする．同型

(2) $$R\pi \otimes_{RH} (M|_H) \cong R[\pi/H] \otimes_R M$$

は良く知られている．

定理1.5.（[DR1]） M, Nは有限生成$\mathbb{Z}\pi$-加群とする．

MとNとは局所同型$\Longleftrightarrow$ $\forall H \in \mathcal{A}_p$に対して $M|_H \cong N|_H$.

補題1.6 πは法pで巡回群とする．単射 $A(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Z}_p)$（命題1.1による）のcokernelは有限位数の元をもたない．

言い替えると，M, Nは$\mathbb{Z}_p\pi$-lattices，S, Tはπ-集合とする，

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T \qquad n \geq 1$$

が成り立てば，

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

を満たすπ集合S', T'が存在する．

命題1.1 および局所同型の定義（(iv)）を利用すると，この補題から直ちに，πが法pで巡回群なら $t(\pi) = Cl(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$が分る。$\pi$は位数は$2l$である非可換群とすると，$T^g(\pi)$のrankは$1$であることが知られている（[DR2]）．従って，この場合は$T^g(\pi) \cong \mathbb{Z}$となっている．この補題を利用して，次の定理を示そう．

定理1.7. 任意の有限群に対して

$$|\pi| \cdot t(\pi) \subset Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$$

証明．$t(\pi)$の一つの元を$[\mathcal{M}]$とする．これは有限位数だから

$$M^n \oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}T$$

となる $n \geq 1$ と π 集合 S, T が存在する．M を $M \oplus \mathbb{Z}S$ に T を $T \cup (\overbrace{S \cup \cdots \cup S}^{n-1\text{個}})$ に置き替え，$M^n \cong \mathbb{Z}T$ と思ってよい．

$\mathcal{B} = \mathcal{A}$，$\chi(H) = 1$，$H \in \mathcal{A}$ の場合に補題1.4を適用すると，

$$(3) \quad \mathbb{Z}^{|\pi|} \oplus {\bigoplus_{H \in \mathcal{A}}}' \mathbb{Z}[\pi/H]^{m(H)} \sim {\bigoplus_{H \in \mathcal{A}}}' \mathbb{Z}[\pi/H]^{n(H)}, \quad m(H), n(H) \geq 0$$

となる（$\sim$ は局所同型であった）．補題1.6によると任意の $H \in \mathcal{A}$ に対して $M|_H$ は置換 $\mathbb{Z}H$-加群の差に局所同型である．(3)の両辺に $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ を作用させると，

$$M^{|\pi|} \oplus \mathbb{Z}S' \sim \mathbb{Z}T'$$

となる π-集合 S, T の存在が分る．Roiter の定理（局所同型の定義(iv)）によると，

$$M^{|\pi|} \oplus \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}\pi \cong \mathbb{Z}T' \oplus \mathfrak{a}$$

を満たす射影イデアル $\mathfrak{a}$ が存在する．$[\mathfrak{a}] = |\pi| \cdot [M]$ (in $t(\pi)$) だから，$|\pi| \cdot t(\pi) \subset Cl(\mathbb{Z}\pi)/C\ell(\mathbb{Z}\pi)$ である．

§2 補題1.6 の証明．

有限群πが <u>of split type</u> とは，$\mathbb{Q}$上の任意の既約表現の Schur index は1であることをいう．言い替えると，群環$\mathbb{Q}\pi$を単純成分に分解すると，各単純成分は可換体上の行列環になっ

ている．dihedral group，奇数位数の巾零群等は of split type である．

$(p, |\pi|)=1$ のときは，$\mathbb{Z}_p$ 上の表現論と $\mathbb{Q}$ 上の表現論とは同じであることに注意する．さらに π が of split type ならば，$\mathbb{Z}_p\pi$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体での $\mathbb{Z}_p$ の integral closure 上の行列環の直和になっている．

補題 2.1　p は $(p, |\pi|)=1$ となる素数とする．既約 $\mathbb{Z}_p\pi$-加群 V, V' を考える．$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V'$ は，$V\not\cong V'$ ならば，共通な直既約な直和因子をもたない．

π が of split type のときは $\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ と既約 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-加群の直和に分れるが $i\neq j$ なら V_i と V_j とは同型でない。

証明．$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p\pi}(V, V')\cong \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}_p\pi}(\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V, \hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V')$ から前半は従う．

π は of split type とすると，V に対応する $\mathbb{Z}_p\pi$ の component は $M_n(R)$，R はデデキント環で可換 $\mathbb{Z}_p$-algebra，となっている．

$$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}R=R_1\oplus\cdots\oplus R_m \qquad R_i \text{ デデキント環}$$

だから，

$$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}M_n(R)=M_n(R_1)\oplus\cdots\oplus M_n(R_m)$$

$M_n(R_i)$ に対応する表現を V_i とおくと，$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ と分解して，$i\neq j$ なら $V_i\not\cong V_j$ である．

系 2.2　π は of split type，$(p, |\pi|)=1$ とする．V は $\mathbb{Z}_p\pi$-

lattice とする. $W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ $(n \geq 1)$ を満たす $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-lattice W に対しては, $W = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_0$ をみたす $\mathbb{Z}_p\pi$-lattice W_0 が存在する.

証明は補題2.1から直ちに従う.

π の p-シロー部分群 π_p は正規部分群とする. Hall の定理によると, $\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書ける. π の任意の部分群は $H * K$ $(H \subset \pi_p,\ K \subset \mu)$ なる形である. $H_1, \cdots, H_t$ は π の p-部分群の共役類の代表系とし,

$X_i = \{ H_i * K \mid K$ は $N_\pi(H_i) \cap \mu$ の部分群の μ での共役類の代表系を動く $\}$

$\mathcal{X} = X_1 \cup \cdots \cup X_t$

とおく. $i \neq j$ なら $X_i \cap X_j = \phi$ であり, π の任意の部分群は $\mathcal{X}$ の唯一つの元に共役である.

補題2.3. $L' \in X_i$, $L'' \in X_j$ $(i \neq j)$ とする. $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi/L']$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi/L'']$ は共通の直既約直和因子を持たない.

証明. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/H_i$, $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/H_j$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi_p$-加群として, すでに共通な直和因子をもっていないから, $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-加群としてもそうである. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L'$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L''$) は $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/H_i$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/H_i$) の直和因子であるから補題が証明できた.

補題1.6を証明しよう. π は法 p で巡回群, すなわち, 上の μ は位数が p と素な巡回群とする. S, T を π-集合, M, N は $\mathbb{Z}_p\pi$-

加群とし，

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T$$

なる関係があるとき，

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

をみたす π 集合 S', T' が存在することを示そう．定理1.7の証明の場合と同様に考えて，最初から $M^n \cong N^n \oplus \mathbb{Z} T$ としてよい．$\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-加群に関しては Krull-Schmidt の定理が成り立つから，$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ の直和因子である（Heller の定理によると N は M の直和因子であることが分るが，今はこの事実は不要である）．従って，$\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-lattice D が存在して，

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T.$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p T = \bigoplus_{L \in \mathfrak{X}} \left(\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L \right)^{r(L)}$$

と書く．補題2.3によれば，$\bigoplus_{L \in X_i} \left(\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L \right)^{r(L)}$ と $\bigoplus_{L \in X_j} \left(\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L \right)^{r(L)}$ とは $i \neq j$ ならば共通の直既約直和因子をもたないから，任意の i に対して

$$(1) \qquad D_i^n \cong \bigoplus_{L \in X_i} \left(\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/L \right)^{r(L)}$$

となる $\hat{\mathbb{Z}}_p$-lattice D_i が存在する．$\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/\pi_p \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p \pi}$ を (1) の両辺に作用させると，巡回群の場合に帰着でき $n \mid r(L)$ がわかる．従って，$T = \underbrace{T' \cup \cdots \cup T'}_{n \text{個}}$ なる π 集合 T' の存在が知られる．すなわち，$\hat{\mathbb{Z}}_p T = (\hat{\mathbb{Z}}_p T')^n$．従って，

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p T'$$

よって　$M \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$ が成り立ち，補題1.6が言えた．

上の巡回群の場合と言うのは次の簡単な命題を指す．

命題2.4．(1) π は巡回群とする．p は $|\pi|$ と素な素数とすると $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ であり，$K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)/A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有限位数の元をもたない．(2) $p \| |\pi|$ のときも，$K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)/A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有限位数の元をもたない．

証明．(1)．$A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ は反転公式そのものである．補題1.6の証明と同様に考えると

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T$$

をみたす $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$-lattice D は $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群の差であることを言えば良い．巡回群は of split type だから系2.2により，$D \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} D_0$ となる $\mathbb{Z}_p\pi$-lattice D_0 が存在する．$A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ だから証明は終り（実は D 自身が $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群であることも言える）．

(2)は，また補題1.6の証明のようにして，$(p, |\pi|) = 1$ の場合に帰着できる．

§3．巾零群

この節では次の定理を示す．

定理3.1．巾零群 π に対しては

$$Cl(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi) = \ker\left(t(\pi) \longrightarrow \prod_{p \| |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p)\right)$$

この定理が意味を持つためには次が必要である。

命題 3.2. π は巾零群で，さらに of split type とすると，任意の素数 p に対して $t(\pi, \mathbb{Z}_p)=0$．特に $t(\pi)=\mathcal{C}\ell(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ である。

定理 3.1 の証明．π の部分群 H に対して

$$\mathrm{Res}^{\pi}_{H} \ ; A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

は制限写像とする．

$$\mathcal{A}=\{\ \pi \text{ の法 } p \text{ で巡回群となる部分群},\ p \text{ は動く}\}$$

とおき

$$\Phi(\pi)=\{x\in A(\pi)\ /\ \mathrm{Res}^{\pi}_{H}(x)=0 \quad \text{for } \forall H\in\mathcal{A}\}$$

とおく．$\Phi(\pi)$ は $A(\pi)$ のイデアルであり

$$\mathbb{Z}S \sim \mathbb{Z}T \iff \Phi(\pi)\ni[S]-[T]$$

（$\sim$ は局所同型）が成り立っている．

さて，$[M]\in\ker(t(\pi)\longrightarrow\prod t(\pi,\mathbb{Z}_p))$ とすると，各素数 p に対して $\mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}}M\oplus\mathbb{Z}_pT_p\cong\mathbb{Z}_pS_p$ となる π 集合 S_p, T_p が存在する．$[M]$ は有限位数の元だから，適当な整数 $n\geq 1$ が存在して，$M^n\oplus\mathbb{Z}T\sim\mathbb{Z}S$ となる π-集合 S, T が存在する．M に適当な置換加群を加えることにより，T_p, T は空集合としてよい．このとき

$$[S]\in\Phi(\pi)+nA(\pi)$$

が示せれば定理の証明は終りである．言い替えると，

$$\Phi(\pi) + nA(\pi) = \ker\left(A(\pi) \longrightarrow \prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p)/nA(\pi, \mathbb{Z}_p)\right)$$

すなわち $A(\pi, \mathbb{Z})$ は $\prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p)$ の直和因子であることを示す（$A(\pi, \mathbb{Z})$ は $C^{g}(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$（帰納定理から直ちに得られる）だから有限位数の元を持たないことに注意）.

素数 $p \mid |\pi|$ を一つ固定する、π のシロー p 部分群を π_p とする．$\pi = \pi_p \times \mu$ と直積に分れる．

$$A(\pi) = A(\pi_p) \otimes_{\mathbb{Z}} A(\pi)$$

だから，

$$(1) \qquad [S] = {\sum_{H \leq \pi_p}}' \left[\pi_p/H\right] \otimes y_H \qquad y_H \in A(\mu)$$

（Σ' は π_p の部分群の共役類を動くものとする）

$[\mathbb{Z}_p S] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_p)$ だから，補題 2.3 によれば $[\mathbb{Z}_p y_H] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_p)$ である．各 H に対して，$s_H \in A(\mu)$ で

$$\mathbb{Z}_p y_H \cong (\mathbb{Z}_p s_H)^n$$

となるものが存在する．$z_H = y_H - ns_H$ とおく．(1)式は

$$(2) \qquad [S] = {\sum_{H \leq \pi_p}}' \left[\pi_p/H\right] \otimes z_H + nu, \qquad u \in A(\pi)$$

と書ける．

$$A(\pi_p) \longrightarrow K(\pi_p, \mathbb{Q})$$

は上への写像（$\mathbb{Q}$ 上の表現はすべて virtually に置換表現）だから，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_t \in A(\pi_p)$ を像が $K(\pi_p, \mathbb{Q})$ の基になるように選ぶ．すなわち，

$$R = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_t$$

とおくと　$R \xrightarrow{\sim} K(\pi_p, \mathbb{Q})$ である．

$\mathbb{Q}[\pi_p/H] = \mathbb{Q}r_H$ となる $r_H \in R$ を選ぶ．$\pi' \in \mathcal{A}$ とすると，π' の p 部分群または p' 部分群（位数が p と素な部分群は巡回群だから，

$$\left| \left\{ \left[\pi_p/H \right] - r_H \right\} \otimes z_H \right\}^{\pi'} \Big| = 0$$

（$p \nmid |H|$ だから，$\mathbb{Q}y_H \cong (\mathbb{Q}S_H)^n$ 従って $\mathbb{Q}z_H = 0$ に注意）

$\Phi(\pi)$ の定義により，

$$\left(\left[\pi_p/H \right] - r_H \right) \otimes z_H \in \Phi(\pi)$$

この関係を (2) に代入すると

$$S = \sum_{H \leq \pi_p}{}' r_H \otimes z_H + nu + v \qquad u \in A(\pi),\ v \in \Phi(\pi)$$

r_H は $\omega_1, \cdots, \omega_t$ の一次結合だから

(3) $\quad [S] = \sum_{1 \leq i \leq t} \omega_i \otimes z_i' + nu + v$

z_i' は $\{z_H\}$ の一次結合である．

$q \,/\, |\pi|$ で $q \neq p$ なる素数に対して

$$[\mathbb{Z}_q S] = \sum_{1 \leq i \leq t} [\mathbb{Z}_q \omega_i] \otimes_{\mathbb{Z}_q} [\mathbb{Z}_q z_i'] + n[\mathbb{Z}_q u]$$

で $[\mathbb{Z}_q S] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_q)$ だから

$$\sum_{1 \leq i \leq t} [\mathbb{Z}_q \omega_i] \otimes_{\mathbb{Z}_q} [\mathbb{Z}_q z_i'] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_q)$$

である．

$$A(\pi, \mathbb{Z}_q) = A(\pi_p, \mathbb{Z}_q) \otimes A(\mu, \mathbb{Z}_q)$$

であり $\{[\mathbb{Z}_q w_i]\}$ は $A(\pi_p, \mathbb{Z}_q)$ の基だから，

$$[\mathbb{Z}_q z_i'] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_q)$$

が結論できる．

π を素数巾の群の直積に分けたときの成分の個数に関する帰納法で証明する．帰納法の仮定により

$$z_i' \in nA(\mu) + \Phi(\mu)$$

さて，$A(\pi_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi(\mu) \subset \Phi(\pi)$ だから

$$[S] \in \Phi(\pi) + nA(\pi)$$

が結論できた．

実は π が素数巾の場合は何も言っていないが，この場合は，

$$t(\pi) = T^q(\pi) = \alpha(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$$

が簡単にいえるから問題はない．

命題3.2 の証明．すこし一般の形で証明する．

命題3.3．π のシロー p-部分群は正規部分群で，$\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書けているとする．π_p の任意の部分群は μ で normalize され，π/π_p は of split type かつ $K(\pi/\pi_p, \mathbb{Q}) = A(\pi/\pi_p, \mathbb{Q})$ が成り立つとすると，$t(\pi, \mathbb{Z}_p) = 0$ である．

（この形だとある種の metacyclic 群に対しても適用できる）

証明. X_i, H_i, $\mathfrak{X}$ 等は12ページのそれと同じものとする. まず次の補題を考える.

補題3.4. Vは既約 $\mathbb{Z}_p\mu$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p\mu$) 加群とする. $\mathbb{Z}_p[\pi/H]\otimes_{\mathbb{Z}_p\mu}V$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi/H\otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p\mu}V$) ($H\leq\pi_p$, このとき $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi/H$ は左 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ 加群, 右 $\hat{\mathbb{Z}}\mu$ 加群の構造をもつから, テンサー積は考えることができる) は直既約 $\mathbb{Z}_p\pi$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$) 加群である.

証明 $V_1\oplus V_2=\mathbb{Z}_p\pi/H\otimes_{\mathbb{Z}_p\mu}V$ とすると, $\mathbb{Z}_p\pi_p$-module としては V_i は置換加群だから $V_1^{\pi_p}\neq 0$, $V_2^{\pi_p}\neq 0$ である. 一方 $(\mathbb{Z}_p\pi/H\otimes_{\mathbb{Z}_p\mu}V)^{\pi_p}\cong V$ だから, $V_1=0$ または $V_2=0$ である.

命題3.3の証明に帰る. $[M]\in t(\pi,\mathbb{Z}_p)$ とする. 適当な置換加群をMに加えることにより

$$M^n=\bigoplus_{L\in\mathfrak{X}}{}'\ \mathbb{Z}_p[\pi/L]^{r(L)}$$

となっている. このとき $[M]\in A(\pi,\mathbb{Z}_p)$ を言えばよい. 補題1.6の証明(§2)と同様にして,

$$(4)\qquad M_i^{\,n}\cong\bigoplus_{L\in X_i}(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi/L)^{r(L)}$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}M=M_1\oplus\cdots\oplus M_t$$

をみたす $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$-加群 M_i が存在することがわかる. 補題3.4と Krull-Schmidt の定理により

$$M_i = \hat{\mathbb{Z}}_p \pi/H_i \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p \mu} W$$

と書ける．両辺に $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi/\pi_p \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p \mu}$ を適用すると，(4)に注意して，

$$W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T \qquad T：\mu 集合$$

と書ける．μがq split type なら

$$W = W_0 \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \qquad W_0 は \mathbb{Z}_p\mu\text{-lattice}$$

と書け，$K(\pi, Q) = A(\pi, Q)$, $p \nmid |\mu|$ だから W_0は置換加群の差に書けている．従って，$[M_i] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ 故に $[M] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$，よって $[M] \in A(\pi, \mathbb{Z}_p)$．命題3.4が証明できた．

系．3.5．π は巾零群，$|\pi|$は高々2個の素数でしか割れないとする．　$t(\pi) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$．

§4．ある種のmetacyclic群

巡回群 κ, μ の半直積 $\pi = \kappa * \mu$ を考える．ここで，$|\kappa| = m$，$|\mu| = n$ とすると，$(m, n) = 1$ であるとしておく．自然な準同型 $\mu \longrightarrow \mathrm{Aut}(\kappa)$ を考える．この核μ'がμの直積因子になっているとき，すなわち $(|\mu'|, |\mu/\mu'|) = 1$ のときは $t(\pi) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ が証明できる．二面体群 D_m で mが奇数の場合はここに含まれる．

またより少し一般のmetacyclic群に関しても同様のことが言えるが，あまりにも技術的なので省略します．

§5 例

$t(\pi) \neq Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^{g}(\mathbb{Z}\pi)$ となる例（遠藤さんによる）を紹介します．

$\pi = \langle \rho, \sigma, \tau \mid \rho^7 = \sigma^{15} = \tau^4 = 1,\ \rho\sigma = \sigma\rho,\ \rho\tau = \tau\rho,\ \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \rangle$

とする，すなわち

$$\pi = C_7 \times (C_{15} \rtimes C_4) \qquad (\rtimes \text{ は半直積})$$

$\mathbb{Q}\pi$ の simple component に

$$\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{T}) \cong M_2(\mathbb{Q}(\zeta_7, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1})), \qquad \bar{T}^2 = -1$$

となるものが存在する．但し，$\zeta_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$，1 の原始 n 乗根とする．ところが，$\mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{T})$ は division ring であり，

$$\mathbb{Q}(\zeta_7) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{T}) = \mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{T})$$

だから，

$$K(\pi, \mathbb{Q}) \supsetneq A(\pi, \mathbb{Q})$$

が言えている．

$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{T}]$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{T})$ の極大整環であるから

$$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{T}] \cong M_2(\mathbb{Z}[\zeta_7, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}])$$

従って

(1) $$L \oplus L \cong \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{T}]$$

を満たす $\mathbb{Z}\pi$-加群 L が存在する．ところで，π-集合 S, T をうまくさがすと完全列

(2) $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{T}] \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0$$

が作れる。以下 [E−M] から二，三の事実を引用しよう。

(3) M は $\mathbb{Z}\pi$ − lattice とすると，完全列

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow 0 \\ S \text{ は } \pi \text{ 集合，任意の部分群 } H \subset \pi \text{ に対して } H^1(H, K) = 0 \end{array} \right\}$$

が存在する。

(4) π の任意のシロー群は巡回群とする。K は $\mathbb{Z}\pi$-lattice とすると，

$$K \text{ は置換加群の直和因子} \Longleftrightarrow H^1(H, K) = 0 \text{ for } {}^\forall H \leq \pi.$$

さて，(1) の L に対し (3) の resolution

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}S' \longrightarrow 0$$

を作る。図型

$$\begin{array}{ccccc} & & K \oplus K & & \\ & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{T}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}S \end{array}$$

の push out diagram を作ると，

(5) $$K \oplus K \oplus \mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S$$

ここでは，A, B が置換加群の直和因子ならば

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}\pi}(A, B) = 0$$

を使った ([S−E])。

さて，(5) は $[K] \in t(\pi)$ を意味している。一方§0の

命題0.1を考える．一般に射影加群は局所自由だから，合成写像

$$Cl(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

は零写像である．ところが，合成写像

$$t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Q})/A(\pi, \mathbb{Q})$$

による $[K]$ の像は $[L] \in K(\pi, \mathbb{Q})/A(\pi, \mathbb{Q})$ と一致するから $\neq 0$．すなわち，

$$t(\pi) \supsetneq Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$$

である．

巾零群の場合も，Schur index が1でない表現を利用して $t(\pi) \supsetneq Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi)$ となる例が作れる．

最後に，

問題 $$Cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi) = \ker\Big(t(\pi) \longrightarrow \prod_{p \mid |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p)\Big)$$

だろうか？

References

[DR1] A. Dress ; On integral representations, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), pp. 1031-1034

[DR2] A. Dress; The permutation class group of a finite group, J. pure and applied algebra 6 (1975), 1–12

[DR3] A. Dress; Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory II, Springer Lect. Note in Math. nº 342 (1973), 183–240

[E-M] S. Endo and T. Miyata; On classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J., 56 (1975), 85–104

[OL.1] R. Oliver: G-actions on disks and permutation representations, J. Algebra 50 (1978), 44–62

[OL.2] R. Oliver: G-actions on disks and permutation representations II, M. Z. 157 (1977) 237–263

[S-E] R. G. Swan and E. G. Evans: K-theory of finite groups and orders, Lect. Note in Math. 149 (1970).

15/07/1983 J

追記1. 何故奇妙な notation $T^q(\pi)$ を使っているかについては、[S-E]を参照していただければ、御理解いただけるかと思います。

2. 全般にわたり, 大域理論とゆうよりは半大域理論,

すなわち，局所同型の理論であるため，法 p で巡回群に帰着できることは，うまく証明できている訳ですから，

$$\tilde{T}^g(\pi) = T^g(\pi) \Big/ \{[M]=[N] \mid もしも\ M \sim N\}$$

$$\tilde{K}(\pi, \mathbb{Z}) = K(\pi, \mathbb{Z}) \Big/ \{[M]=[N] \mid M \sim N\}$$

を導入して，$\tilde{T}^g(\pi)$，$\tilde{K}(\pi, \mathbb{Z})$ を扱うほうが良かったかとも思います。